Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 2

9 mai 2023

Zone A après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[110 points]**.

2223 – 7217

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

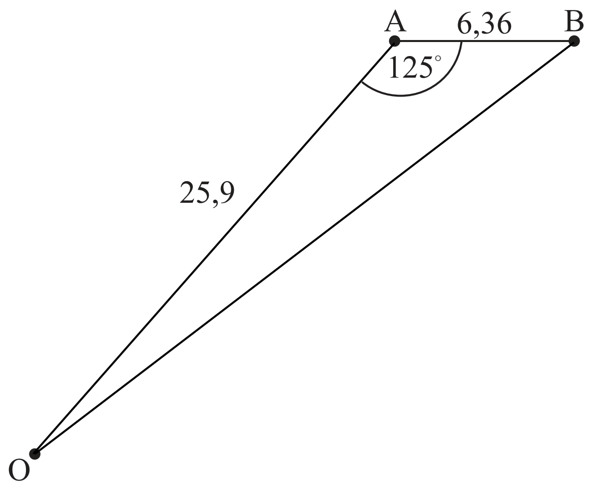
1. [Note maximale : 13]

Le diagramme montre des points, vus du haut, dans un parc, à un moment précis dans le temps.

La distance entre deux arbres, situés aux points A et B, est de $6{,}36\,\text{m}$.

Odette joue au football dans le parc et se tient au point O, tel que $\text{OA} = 25{,}9\,\text{m}$ et $\text{O}\hat{\text{A}}\text{B} = 125^\circ$.

la figure n'est pas à l'échelle



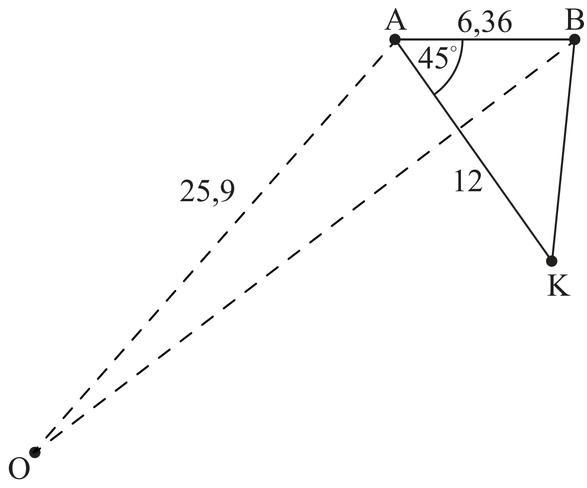
(a) Calculez l'aire du triangle AOB. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Khemil, l’ami d’Odette, se tient au point K, de sorte qu’il est à $12\,\mathrm{m}$ de A et $\mathrm{K\hat{A}B} = 45^\circ$.

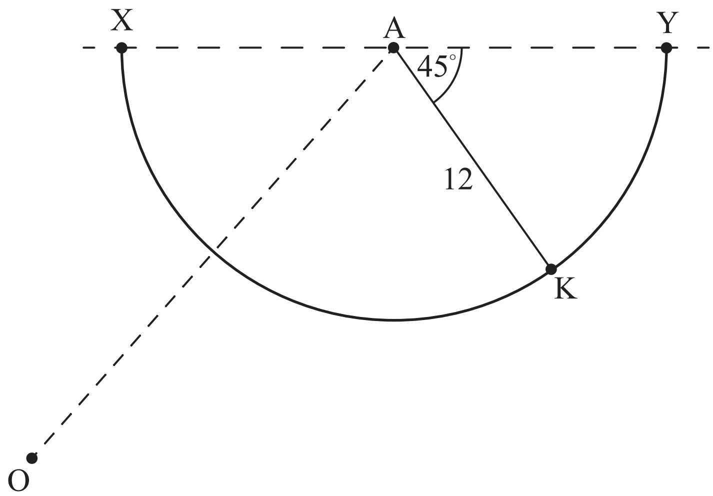
la figure n’est pas à l’échelle



(b) Calculez la distance entre Khemil et le point B. [3]

XY est un chemin semi-circulaire dans le parc dont le centre est A et tel que $\mathrm{K\hat{A}Y} = 45^\circ$. Khemil se tient sur le chemin et le ballon d’Odette est au point X. Ceci est illustré dans le diagramme ci-dessous.

la figure n’est pas à l’échelle



La longueur $\mathrm{KX} = 22{,}2\,\mathrm{m}$, $\mathrm{K\hat{O}X} = 53{,}8^\circ$ et $\mathrm{O\hat{K}X} = 51{,}1^\circ$.

(c) Trouvez qui d’Odette ou de Khemil est plus proche du ballon. [4]

Khemil court le long du chemin semi-circulaire pour ramasser le ballon.

(d) Calculez la distance parcourue par Khemil. [3]

2. [Note maximale : 12]

Un scientifique mène une expérience sur la croissance d'une certaine espèce de bactéries.

La population de bactéries, P, peut être modélisée par la fonction

$$P(t) = 1200 \times k^t,\ t \geq 0,$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience et k est une constante positive.

(a) (i) Écrivez la valeur de $P(0)$.

(ii) Interprétez ce que cette valeur signifie dans ce contexte. [2]

3 heures après le début de l'expérience, la population de bactéries est de $18\,750$.

(b) Trouvez la valeur de k. [2]

(c) Trouvez la population de bactéries 1 heure et 30 minutes après le début de l'expérience. [2]

Le scientifique mène une deuxième expérience avec une autre espèce de bactéries.
La population de cette espèce, S, peut être modélisée par la fonction

$$S(t) = 5000 \times 1{,}65^t,\ t \geq 0,$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le début des deux expériences.

(d) Trouvez la valeur de t lorsque les deux populations de bactéries sont égales. [2]

Il faut 2 heures et m minutes pour que le nombre de bactéries dans la deuxième expérience atteigne $19\,000$.

(e) Trouvez la valeur de m, en donnant votre réponse sous la forme d'une valeur entière. [4]

3. [Note maximale : 16]

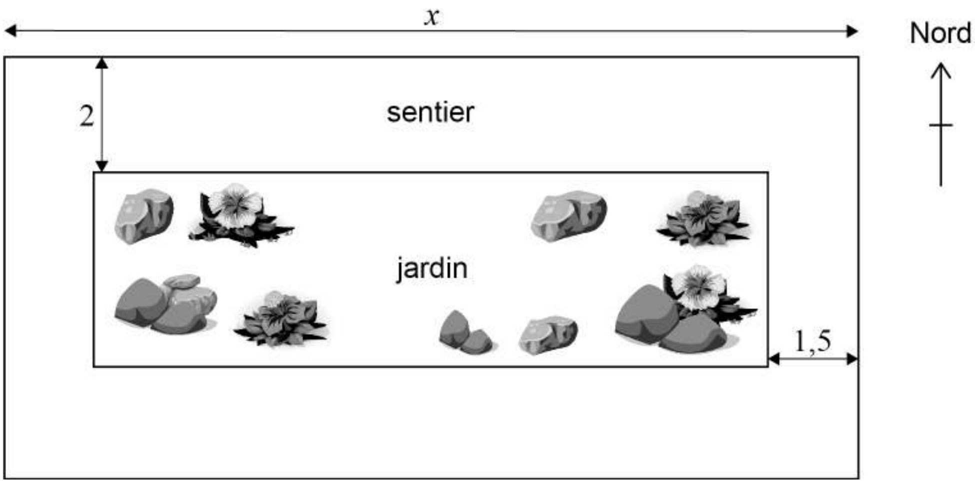
Un certain parc est composé d'un jardin rectangulaire dont l'aire est de $A\,\text{m}^2$, ainsi que d'un sentier en béton qui l'entoure. L'aire totale du parc est de $1200\,\text{m}^2$.

La largeur du sentier au nord et au sud du parc est de $2\,\text{m}$.

La largeur du sentier à l'ouest et à l'est du parc est de $1{,}5\,\text{m}$.

La longueur du parc (le long des côtés nord et sud) est de x mètres, $3 < x < 300$.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Montrez que $A = 1212 - 4x - \dfrac{3600}{x}$. [5]

(b) Trouvez les dimensions possibles du parc si l'aire du jardin est de $800\,\text{m}^2$. [4]

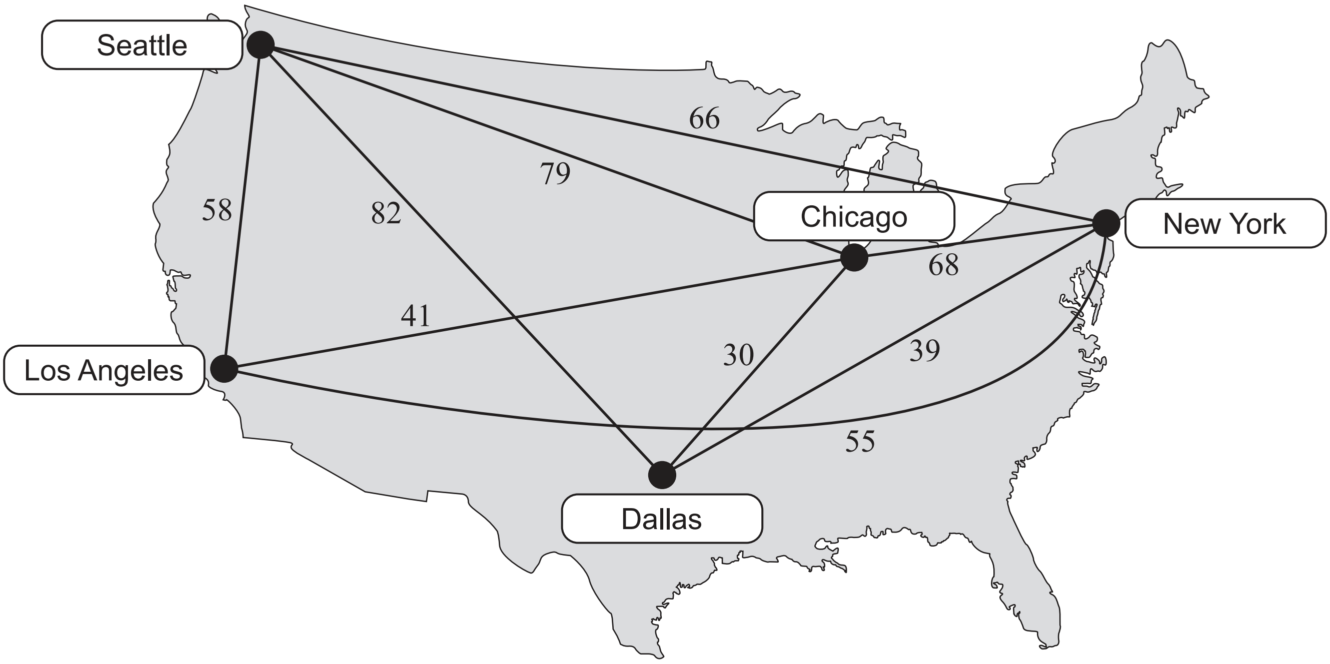
(c) Trouvez une expression pour $\dfrac{\text{d}A}{\text{d}x}$. [3]

(d) Utilisez votre réponse de la partie (c) pour trouver la valeur de x qui rendra l'aire du jardin maximale. [2]

(e) Trouvez l'aire maximale possible du jardin. [2]

4. [Note maximale : 19]

Le graphe suivant montre cinq villes des États-Unis reliées par des arêtes pondérées représentant les vols directs les moins chers, en dollars ($), entre les villes.



(a) Expliquez pourquoi le graphe peut être décrit comme « connexe », mais pas « complet ». [2]

(b) Trouvez un arbre couvrant minimal pour le graphe en utilisant l'algorithme de Kruskal.

Indiquez clairement l'ordre dans lequel vos arêtes sont ajoutées et dessinez l'arbre obtenu. [3]

(c) En utilisant uniquement les arêtes obtenues dans votre réponse à la partie (b), trouvez une borne supérieure pour le problème du voyageur de commerce. [2]

Ronald vit à New York et souhaite voler vers chacune des autres villes, avant de finalement retourner à New York. Après quelques recherches, il découvre qu'il existe un vol direct entre Los Angeles et Dallas qui coûte 26 $. Il met à jour le graphe pour illustrer ceci.

(d) En utilisant l'algorithme du plus proche voisin et en partant de Los Angeles, déterminez une meilleure borne supérieure que celle trouvée dans la partie (c).

Indiquez clairement l'ordre dans lequel vous ajoutez les sommets. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

(e) (i) En effaçant le sommet qui représente Chicago, utilisez l'algorithme du sommet effacé pour déterminer une borne inférieure pour le problème du voyageur de commerce.

(ii) De même, en effaçant plutôt le sommet qui représente Seattle, déterminez une autre borne inférieure. [5]

(f) À partir de là, en utilisant vos réponses précédentes, écrivez votre meilleure inégalité pour le circuit le **moins** cher que Ronald pourrait faire. Soit la variable C le coût total du circuit, en dollars. [2]

(g) Écrivez un circuit strictement supérieur à votre borne inférieure et strictement inférieur à votre borne supérieure. [2]

Tournez la page

5. [Note maximale : 14]

La Belgique, l'Allemagne et les Pays-Bas se rejoignent en un point unique appelé Vaalserberg.

Pour soutenir la planification future des transports, un cercle de $10\,\text{km}$ a été tracé autour de Vaalserberg sur une carte. Une étude a été menée sur cinq ans pour déterminer quel pourcentage de personnes vivant dans chacun de ces pays (à l'intérieur de la région circulaire de $10\,\text{km}$) soit sont restées dans leur propre pays soit ont déménagé dans un autre pays du cercle.

À partir de cette étude, les mouvements suivants ont été observés au cours des cinq années.

- À partir de la Belgique, $5\,\%$ ont déménagé en Allemagne et $0{,}5\,\%$ ont déménagé aux Pays-Bas.
- À partir de l'Allemagne, $2\,\%$ ont déménagé aux Pays-Bas et $1{,}5\,\%$ ont déménagé en Belgique.
- À partir des Pays-Bas, $3\,\%$ ont déménagé en Allemagne et $2\,\%$ ont déménagé en Belgique.

Tout autre changement de population à l'intérieur de la région circulaire peut être ignoré.

(a) Représentez les informations ci-dessus dans une matrice de transition $\boldsymbol{T}$. [3]

À la fin de l'étude, la population du côté belge était de $26\,000$, la population du côté allemand était de $240\,000$ et la population du côté néerlandais était de $50\,000$.

(b) En utilisant $\boldsymbol{T}$, trouvez la population attendue du côté allemand de Vaalserberg 30 ans après la fin de l'étude. [4]

Pour la matrice $\boldsymbol{T}$, il existe un vecteur d'état stationnaire

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 et u_3 correspondent respectivement aux proportions de la population totale du côté belge, du côté allemand et du côté néerlandais.

Le vecteur d'état stationnaire $\boldsymbol{u}$ peut être trouvé en résolvant un système d'équations.

(c) (i) Déterminez les équations à résoudre.

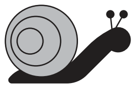
(ii) En résolvant votre système d'équations, trouvez $\boldsymbol{u}$. [3]

(d) Utilisez votre réponse de la partie (c)(ii) pour déterminer la population attendue à long terme du côté allemand. [2]

(e) Suggérez deux raisons pour lesquelles il est probable que votre réponse à la partie (d) ne soit pas exacte. Vous pouvez commenter à la fois le modèle et la situation dans le contexte. [2]

6. [Note maximale : 18]

Le jardinier d’un parc local suggère que le nombre d’escargots trouvés dans le parc peut être modélisé par une distribution de Poisson.



(a) Suggérez deux observations que le jardinier a pu faire et qui l’ont amené à proposer ce modèle. [2]

Supposons maintenant que le modèle est valide et que le nombre moyen d’escargots par m^2 est de $0{,}2$. Le jardinier inspecte, au hasard, une zone de $12\,\mathrm{m}^2$ du parc.

(b) Trouvez la probabilité que le jardinier trouve exactement quatre escargots. [3]

(c) Trouvez la probabilité que le jardinier trouve moins de trois escargots. [2]

(d) Trouvez la probabilité que, lors de trois inspections consécutives, le jardinier trouve au moins un escargot par inspection. [3]

À la suite de fortes pluies pendant la nuit, le jardinier a voulu déterminer si le nombre d’escargots trouvés dans une zone aléatoire de $12\,\mathrm{m}^2$ du parc avait augmenté.

(e) Indiquez les hypothèses pour le test. [2]

(f) Trouvez la région critique pour le test au niveau de signification de $1\,\%$. [3]

(g) Étant donné que le nombre moyen d’escargots par m^2 est en fait passé à $0{,}75$, trouvez la probabilité que le jardinier commette une erreur de type II. [3]

7. [Note maximale : 18]

Un biologiste suggère que les taux de variation de la population de moucherons (après un temps $t \geq 0$) dans un écosystème particulier sont donnés par les équations suivantes, où x est la population de moucherons mâles et y est la population de moucherons femelles.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x + 6y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 9x - y$$

(a) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants à la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$$ [6]

(b) À partir de là, écrivez la solution générale du système, en donnant votre réponse sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{p}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\boldsymbol{p}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, où A, B, λ_1, λ_2 $(\lambda_2 > \lambda_1)$ sont des constantes scalaires et $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ sont des constantes vectorielles. [2]

Initialement $x = 500$ et $y = 125$.

(c) Déterminez la valeur de A et la valeur de B. [2]

(d) Indiquez le ratio à long terme des moucherons mâles par rapport aux moucherons femelles. [1]

(e) Trouvez la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ au temps $t = 0$. [3]

(f) Esquissez la trajectoire, sur le portrait de phase, de la croissance de la population des moucherons. [4]

Références :